А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 13



Шымкент, 2011

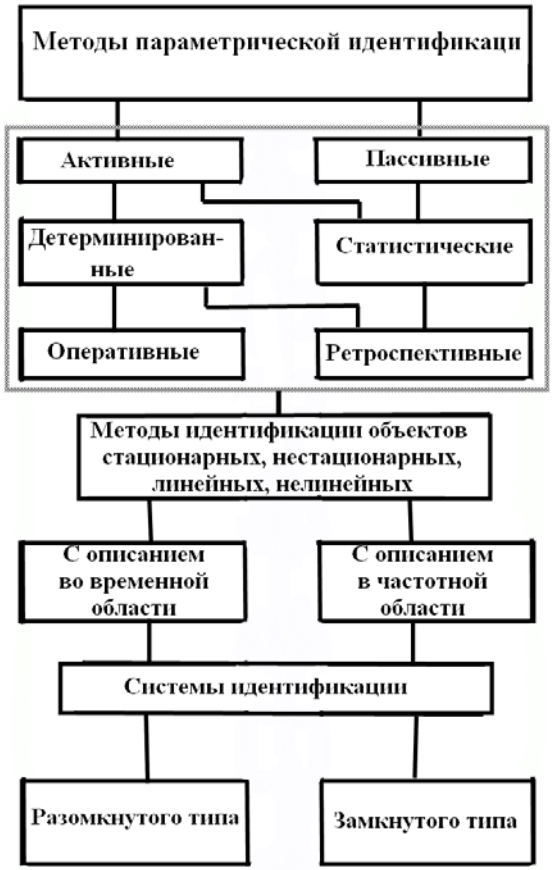
Тема 9 Оценивание параметров и состояния объектов

Лекция 13 Оценивание параметров и состояния объектов

Материал темы лекции содержит следующие вопросы: оценивание параметров и состояния объектов; фильтр Калмана-Бьюси; одновременное оценивание параметров и состояний; методы квазилинеаризации.

Оценивание параметров и состояния объектов производится на стадии параметрической идентификации.

Для решения задач параметрической идентификации разработано большое число методов, учитывающих особенности объектов, условия их функционирования, способ тестирования и математическую основу анализа экспериментальных данных, вид получаемых моделей и т. п. Методы параметрической идентификации можно характеризовать различными признаками. По способу тестирования исследуемого объекта методы идентификации делятся на активные и пассивные.



Применение активных методов предполагает подачу на вход объекта специально сформированных воздействий - детерминированных или случайного характера. Среди активных методов идентификации широкое распространение получили частотные методы, основанные на измерении установившихся выходных сигналов исследуемого объекта, вызванных гармоническим входным воздействием. Для идентификации линейных объектов используют и другие периодические воздействия (прямоугольные, треугольные), а также апериодические воздействия в виде ступенчатых, импульсных и других сигналов. В качестве случайных тестовых сигналов особенно широко применяют псевдослучайные двоичные последовательности, что объясняется простотой их получения и удобством обработки с помощью средств вычислительной техники. Достоинство активной идентификации заключается в нежесткости требований к априорным данным об объекте. Основываясь на методах планирования эксперимента, такую идентификацию можно осуществлять целенаправленно, что позволяет ускорять выявление закономерностей в зависимостях между переменными объекта и сокращать тем самым временные и материальные затраты на его испытания.

При использовании пассивных методов идентификации объект находится в условиях нормального функционирования. При этом параметры его модели ищутся по результатам статистической обработки наблюдений естественных изменений величин на

его входе и выходе. При пассивной идентификации применяют статистические принципы обработки данных измерений (методы корреляционного и регрессионного анализов, стохастической 319 аппроксимации и др.). Преимущество пассивных методов состоит в том, что для их применения достаточна регистрация переменных только в режимах рабочего функционирования объекта. Это особенно важно при идентификации реальных промышленных процессов с непрерывным производством дорогостоящего продукта. С другой стороны, пассивные методы идентификации сопряжены со значительными затратами времени на накопление и обработку информации. Кроме того, их применение возможно лишь в том случае, если воздействие на входе объекта обладает достаточно широким частотным спектром (по крайней мере, не меньше, чем полоса частот, в пределах которой необходимо оценить динамическую характеристику объекта). Снижение точности идентификации, обусловленное последней причиной, можно существенно уменьшить, если добавить к естественному входному воздействию объекта специального случайного сигнала небольшого уровня с заданными статистическими характеристиками. В этом случае ослабляется также и влияние обычно действующих на объект неконтролируемых помех.

При идентификации объектов применяют как детерминированные, так и статистические методы обработки данных наблюдений, что определяется характером анализируемых сигналов. Детерминированные методы могут быть использованы только при активной идентификации в случае, когда сигналы на входе и выходе объекта имеют детерминированную форму. Однако в реальных условиях из-за сильного влияния помех такие сигналы зачастую сильно зашумлены. Требуемая точность анализа здесь может быть достигнута дополнением детерминированных алгоритмов обработки статистическим усреднением (сглаживанием) получаемых результатов. Очевидно, что для этого необходимы более длительные испытания объекта с целью накопления данных.

По признаку временных затрат методы идентификации разделяются на оперативные и ретроспективные. При оперативной идентификации обеспечивается отслеживание меняющихся параметров объекта. С этой целью применяют рекуррентные алгоритмы обработки данных, которые удается реализовать аппаратными средствами в темпе, близком к скорости протекания процессов в изучаемом объекте. При ретроспективной идентификации значительно упрощают условия решения задачи идентификации. В этом случае можно многократно обращаться к накопленным экспериментальным данным и подбирать наиболее эффективные алгоритмы их анализа.

Методы идентификации часто различают также по признаку, указывающему на их приспособленность к исследованию динамических объектов того или иного класса. Важной особенностью при идентификации является наличие или отсутствие процедур сравнения получаемой модели с объектом. Это определяет соответственно две возможные структуры построения систем идентификации: по разомкнутой и замкнутой схемам.

Результатом решения задачи идентификации является математическая модель, представленная во временной или частотной области. При этом полученная модель адекватна объекту по поведению, т. е. по динамическим свойствам, в соответствии с выбранным при идентификации критерием подобия.

Рассмотрим некоторые основные понятия из области оценивания параметров и состояния объектов.

Винеровское оценивание — задача нахождения импульсной характеристики линейной стационарной системы, которая минимизирует среднюю квадратическую ошибку между реальным y(t) и желаемым d(t) выходными сигналами при бесконечном времени наблюдения. На вход системы подается сигнал f(t), выходной сигнал определяется выражением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Предполагается, что условия применения, характер сигналов и помех остаются достаточно стабильными, их статистические характеристики меняются мало. Если же условия переменны и помехи в процессе работы систем изменяются существенно, то возникает необходимость автоматической оптимизации параметров систем. Это осуществляется в различного рода экстремальных, адаптивных, обучаемых системах. Во время второй мировой войны перед американским математиком Н. Винером встала задача отделения полезного сигнала от шума при решении задач автоматизации систем противовоздушной обороны, использующих радиолокационную технику. В 1942 г. Н. Винер решил эту задачу, допустив что искомая система должна быть линейной с постоянными параметрами, время наблюдения бесконечно, входной и желаемый выходной сигналы системы являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами, система минимизирует среднюю квадратическую ошибку между желаемым и реальным выходными сигналами.

Уравнение Винера – Хопфа. В основе статистических методов определения импульсной переходной функции объекта лежит интегральным уравнением Фредгольма $(-\infty < t < \infty)$ или интегральное **уравнение Винера-Хопфа** (t>0):

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - t)g(t)dt \approx \int_{0}^{T} R_{xx}(\tau - t)g(t)dt, \qquad \text{(УВХ)}$$

где $g(t)$ - импульсная характеристика объекта, весовая функция.

Определенная из этого уравнения $g(t)$ является наилучшей в смысле среднеквадратичной оценки. В уравнении (УВХ) обозначено *Rxy* - взаимная корреляционная функция выхода и входа; *Rxx* - корреляционная функция входного сигнала.

Решение уравнения (УВХ) с целью определения $g(t)$ проводят различными методами, например: методом подбора ординат импульсной функции на управляемом фильтре (требует специальную аппаратуру); методом сведения уравнения (УВХ) к системе линейных алгебраических уравнений (см. ниже); методом преобразования Фурье.

УВХ было получено Винером и Хопфом при решении задачи радиационного равновесия внутри звезд. Также используется в кибернетике, при решении задачи выделения, фильтрации полезного сигнала из его смеси с шумом.

Напомним, что выход $x(t)$ линейного объекта, имеющего вход $y(t)$ определяется интегралом свертки:

$$x(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau)y(t-\tau)d\tau \qquad \text{(УС)}$$

Фильтр Винера .Во время второй мировой войны Винер выполнил свои фундаментальные, ставшие теперь классическими исследования по интерполяции, экстраполяции и сглаживанию временных рядов. Фильтр Калмана позволяет получить решение, сформулированное в пространстве состояний. В отличие от метода Винера фильтр Калмана легко распространяется на случай нестационарных сигналов

Фильтр Калмана-Бьюси. В 1960 году . Рудольф Калман предложил алгоритм решения фдачи линейной оптимальной фильтрации для дискретных нестационарных гауссовских случайных процессов. А в 1961 году совместно с Р. Бьюси он опубликовал алгоритм решения задачи для непрерывного времени]. Р. Калман несколько изменил постановку задачи линейной оптимальной фильтрации. Он вместо математического ожидания и ковариации для описания оцениваемого случайного процесса x(t, ω) применил формирующий фильтр - динамическую систему. возбуждаемую белым гауссовским шумом. В результате был получен рекуррентный алгоритм решения задачи оценивания в случае наличия белого шума в измерениях. Алгоритм удобен для реализации на ЭВМ. Это привело к его широкому распространению, несмотря на то. что в общем случае замена описания случайного процесса с помощью математического среднего и ковариации на описание формирующим фильтром сталкивается с еще не решенной проблемой нахождения параметров динамической системы.

Винеровские фильтры лучше всего подходят для обработки процессов или отрезков процессов в целом (блочная обработка). Для последовательной обработки требуется текущая оценка сигнала на каждом такте с учетом информации, поступающей на вход фильтра в процессе наблюдения. При винеровской фильтрации каждый новый отсчет сигнала потребовал бы пересчета всех весовых коэффициентов фильтра. В настоящее время широкое распространение получили адаптивные фильтры, в которых поступающая новая информация используется для непрерывной корректировки ранее сделанной оценки сигнала (сопровождение цели в радиолокации, системы автоматического регулирования в управлении и т.д).

Проблема построения формирующего фильтра полностью решена лишь для стационарных случайных процессов, спектральная плотность которых допускает факторизацию. Но все же для большинства практических задач теории управления эту задачу удается успешно решать, а во многих случаях формирующий фильтр известен уже на стадии проектирования системы управления.

Фильтр Калмана — эффективный (имеющий способ гарантированно достигать результат за конечное число действий) рекурсивный фильтр, оценивающий вектор состояния динамической системы, используя ряд неполных и зашумленных измерений.. Фильтр Калмана широко используется в инженерных и эконометрических приложениях: от радаров и систем технического зрения до оценок параметров макроэкономических моделей. Калмановская фильтрация является важной частью теории управления, играет большую роль в создании систем управления. Совместно с линейно-квадратичным регулятором фильтр Калмана позволяет решить задачу линейно-квадратичного гауссовского управления. Фильтр Калмана и линейно-квадратичный регулятор – возможное решение большинства фундаментальных задач в теории управления. В большинстве приложений, количество параметров, задающих состояние объекта, больше, чем количество наблюдаемых параметров, доступных для измерения. При помощи модели объекта по ряду доступных измерений фильтр Калмана позволяет получить оценку внутреннего состояния. Фильтр Калмана предназначен для рекурсивного дооценивания вектора состояния априорно известной динамической системы, то есть для расчёта текущего состояния системы необходимо знать текущее измерение, а также предыдущее состояние самого фильтра. Таким образом фильтр Калмана, как и множество других рекурсивных фильтров, реализован во временном представлении, а не в частотном.

Наглядный пример возможностей фильтра – получение точных, непрерывно обновляемых оценок положения и скорости некоторого объекта по результатам временного ряда неточных измерений его местоположения. Например, в радиолокации стоит задача сопровождения цели, определения её местоположения, скорости и ускорения, при этом результаты измерений поступают постепенно и сильно зашумлены. Фильтр Калмана использует вероятностную модель динамики цели, задающую тип вероятного движения объекта, что позволяет снизить воздействие шума и получить хорошие оценки положения объекта в настоящий, будущий или прошедший момент времени.

Рассмотрим второй пример. Пусть про старый тихоходный автомобиль известно, что его разгон до 60 миль в час занимает не менее 10 секунд. Представим, что его спидометр дает очень зашумленные измерения, которые находятся в разбросе в 40 миль в час вокруг истинного значения скорости автомобиля. Из неподвижного положения, которое можно определить точно, так как при этом не вращаются колеса автомобиля, водитель до упора нажимает педаль акселератора. Через пять секунд спидометр показывает 70 миль в час. Водитель, зная, что автомобиль не может разгоняться так быстро, и используя информацию о погрешности спидометра, может прийти к выводу, что более вероятная скорость автомобиля около 40 миль в час. Схожим образом поступает и фильтр Калмана, благодаря информации о характеристиках шума и динамике системы он уменьшает влияние шума измерений.

Одновременное оценивание параметров и состояния

Задача оценивания параметров тесно связана с задачами фильтрации и оценивания состояния. Схемы обработки сигналов, которые позволяют отделить полезные сигналы от нежелательных возмущений (шумов), называются фильтрами.

Упомянутый выше фильтр Калмана можно описать как метод (аппаратуру, программу вычислений) для обработки результатов измерений, искаженных помехами; эта обработка должна осуществляться таким образом, чтобы получалась оптимальная оценка некоторой переменной. Этот фильтр может применяться в целом ряде задач:

а) фильтрация, интерполяция, сглаживание, экстраполяция (предсказание) временных рядов и непрерывных сигналов ;

б) оценивание состояния, необходимое для реализации алгоритмов оптимального управления в случаях, когда некоторые или даже все компоненты вектора состояния объекта не поддаются непосредственному измерению;

в) объединение результатов измерений некоторой переменной несколькими измерительными приборами, различающимися типом ошибок (например, в задачах навига ции — акселерометры, гироскопы, радиолокаторы с измерением эффекта Допплера и т. д.);

г) оценивание параметров путем перехода от вектора состояния к вектору параметров.

Методы квазилинеаризации.

Метод квазилинеаризации впервые ввели Беллман и Калаба [1, 2] для решения краевых задач в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Применение этого метода для идентификации параметров нелинейных систем было рассмотрено в основном в работах [3—6].

Метод квазилинеаризации по существу представляет собой метод преобразования нелинейной многоточечной краевой задачи, являющейся в основном стационарной, в линейную нестационарную задачу. Этот метод применим как к непрерывным, так и к дискретным процессам. Предполагается, что идентифицируемые параметры постоянны и, так же как и во всех других методах идентификации нелинейных систем, должен быть задан тип нелинейности, по крайней мере в виде аппроксимации. Может быть учтена и нестационарность параметров, если они изменяются медленно в сравнении со скоростью сходимости процедуры идентификации. Сходимость процедуры будет довольно высокой, если имеется близкое начальное приближение к величинам параметров, которые необходимо идентифицировать. Метод по своей сути является итерационным; он не требует введения специальных пробных воздействий и поэтому применим для использования в реальном масштабе времени.

Так как процедуры идентификации методом квазилинеаризации сходятся к истинным значениям параметров только тогда, когда начальные приближения величин параметров оказываются внутри области сходимости, для указанных процедур требуется определенная априорная информация о диапазоне значений параметров; в этом нет необходимости, если используются последовательные подходы, рассмотренные в гл. 6 и 7. Метод квазилинеаризации имеет особое значение в тех случаях, *когда различные переменные состояния системы не могут быть измерены одновременно во все моменты измерений.* В этом случае описание системы в пространстве состояний само по себе является многоточечной задачей, для которой применение метода квазилинеаризации естественно. Метод квазилинеаризации по своей сути является методом идентификации, основанным на фиксированном числе измерений, а не на последовательно возрастающем объеме измерений, как в гл. 6, 7. В том случае, когда имеется достаточное число измерений некоторых состояний, а измерения других состояний не проводятся, метод квазилинеаризации может дать оценки этих недостающих состояний и параметров одновременно

При построении системы управления не всегда можно с достаточной точностью описать объект управления линеаризованной моделью. Если объект управления не удается линеаризовать, приходится решать задачу идентификации нелинейного объекта.

Одним из наиболее мощных методов идентификации нелинейных систем является метод квазилинеаризации. Этот метод успешно применяется и тогда, когда различные компоненты вектора состояния измеряются в разное время, или некоторые компоненты вектора состояния вообще не измеряются.

Метод квазилинеаризации представляет собой преобразование нелинейной стационарной многоточечной краевой задачи в линейную нестационарную задачу.

Применение метода квазилинеаризации позволяет одновременно получить оценку вектора параметров и вектора состояния системы на интервале идентификации.

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую уравнением:

$$\dot{x} = f(x,u,q), \qquad (13.1)$$

где: x – вектор состояния размерности n,;
u – вектор входных воздействий размерности m,;
q – вектор параметров системы размерности k,;

f – вектор-функция размерности n.

Предполагается, что векторы u и x измеряются (x может измеряться частично), а вид компонентов вектор-функции f известен. Вектор параметров q неизвестен и подлежит идентификации.

Полагаем, что компоненты вектора параметров q неизменны на интервале идентификации, то есть,

$$\dot{q} = 0. \qquad (13.2)$$

Введем новый вектор состояния

$$\chi = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}. \qquad (13.3)$$

Для этого вектора справедливо уравнение

$$\dot{\chi} = \Psi(\chi,u), \qquad (13.4)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} f_1(\chi,u) \\ \vdots \\ f_n(\chi,u) \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (13.5)$$

Предположим, что уже найдена *N*-я итерация оценки вектора состояния (13.4) $\hat{\chi}_N$. Тогда, раскладывая уравнение (13.5) в ряд Тейлора относительно $\hat{\chi}_N$ и учитывая только члены первого порядка малости, получим *(N+1)*-ю оценку вектора:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{\Psi}_{N+1} = \hat{\Psi}_N + \frac{\partial \hat{\Psi}_N}{\partial \chi}(\hat{\chi}_{N+1} - \hat{\chi}_N), \qquad (13.6)$$

где: $\dfrac{\partial \hat{\Psi}_N}{\partial \chi} = \left.\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\chi_N}$, $\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi} = \left[\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \;\vdots\; \dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial q}\right]$,

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial q_k} \\ \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{\Psi}_n}{\partial q_k} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (13.6) линейно относительно $\hat{\chi}_{N+1}$, поэтому его можно записать в виде:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N \hat{\chi}_{N+1} + \hat{V}_{N+1}, \qquad (13.7)$$

где:

$$\hat{A}_N = \left.\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N}, \quad \hat{V}_N = \left.\hat{\Psi}\right|_{\chi=\ddot{\chi}_N} - \left.\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N} = \hat{\Psi}_N - \hat{A}_N \hat{\chi}_N .$$

Уравнение (13.7) линейное нестационарное. Его решение имеет вид:

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)V_N(\tau)\,d\tau, \qquad (13.8)$$

или

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{\Psi}_N(\tau) - \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{A}_N(\tau)\hat{\chi}_N(\tau)d\tau, \qquad (13.9)$$

где $X_N(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N\hat{\chi}_{N+!}. \qquad (13.10)$$

Для нахождения вектора χ размерности $n+k$ необходимо иметь $n+k$ измерений. Предположим, что измеряются компоненты вектора состояния $x_l(t_j)$, то есть, j-е компоненты вектора состояния в t_j моменты времени. Тогда вектор $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$ удовлетворяет многоточечному граничному условию

$$x_j(t_j) = X_{j,N}(t_j,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \rho_{j,N}(t_j), \qquad (13.11)$$

$$\rho_{j,N}(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} X_{j,N}(t_j,\tau)V_N(\tau)\,d\tau. \qquad (13.12)$$

В (13.11) и (13.12) через $X_{j,N}()$ обозначена j-я строка фундаментальной матрицы $X_N()$. Компоненты вектора состояния $x_j(t_j)$ могут быть одними и теми же или разными.

Так как имеется $n+k$ измерений, то уравнений (13.11) тоже $n+k$. По сути уравнения (13.11) являются линейными алгебраическими с $n+k$ переменными. Таким образом, $n+k$ измерений дает $n+k$ линейных алгебраических уравнений с $n+k$ неизвестными, составляющими вектор $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$. Этот вектор ищется, и последние k его компонентов представляют собой искомый вектор параметров q.

Блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации приведена на рисунке 13.1. В блоке *2* производится ввод $n+k$ измерений $x_j(t_j)$, начального приближения вектора параметров $\hat{q}_0$ и начальных условий для вектора состояния $x_0(t_0)$.

В блоке 4 производится решение уравнения с начальными приближениями $\hat{q}_{N+1}, x_N(t_0)$, которыми на первом шаге являются $\hat{q}_0, x_0(t_0)$.Решение производится на интервале $[t_0, t_{max}]$, где t_{max} –максимальное из времен t_j, в которые производятся измерения $x_j(t_j)$.

В блоке *5* решение *x(t)*, полученное в блоке *4*, подставляется в уравнение (13.9) для получения оценок из уравнения (13.11).

В блоке *6* решается система из $n+k$ линейных алгебраических уравнений (13.11) и ищется $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$, то есть, $\hat{q}_{N+1}$и $\hat{x}_{N+1}(t_0)$.

В блоке *7* оценивается норма разности приближений вектора параметров на последних двух шагах. Если эта норма не больше заданной величины ε, то процесс идентификации завершается, а в блоке *9* производится вывод найденного значения вектора параметров. В противном случае происходит переход к следующей итерации.

Процедура идентификации методом квазилинеаризации сходится к истинным значениям только в том случае, если начальные приближения параметров достаточно близки к истинным значениям. Для получения начального приближения можно использовать результаты идентификации линеаризованной модели или применить эвристические методы идентификации.

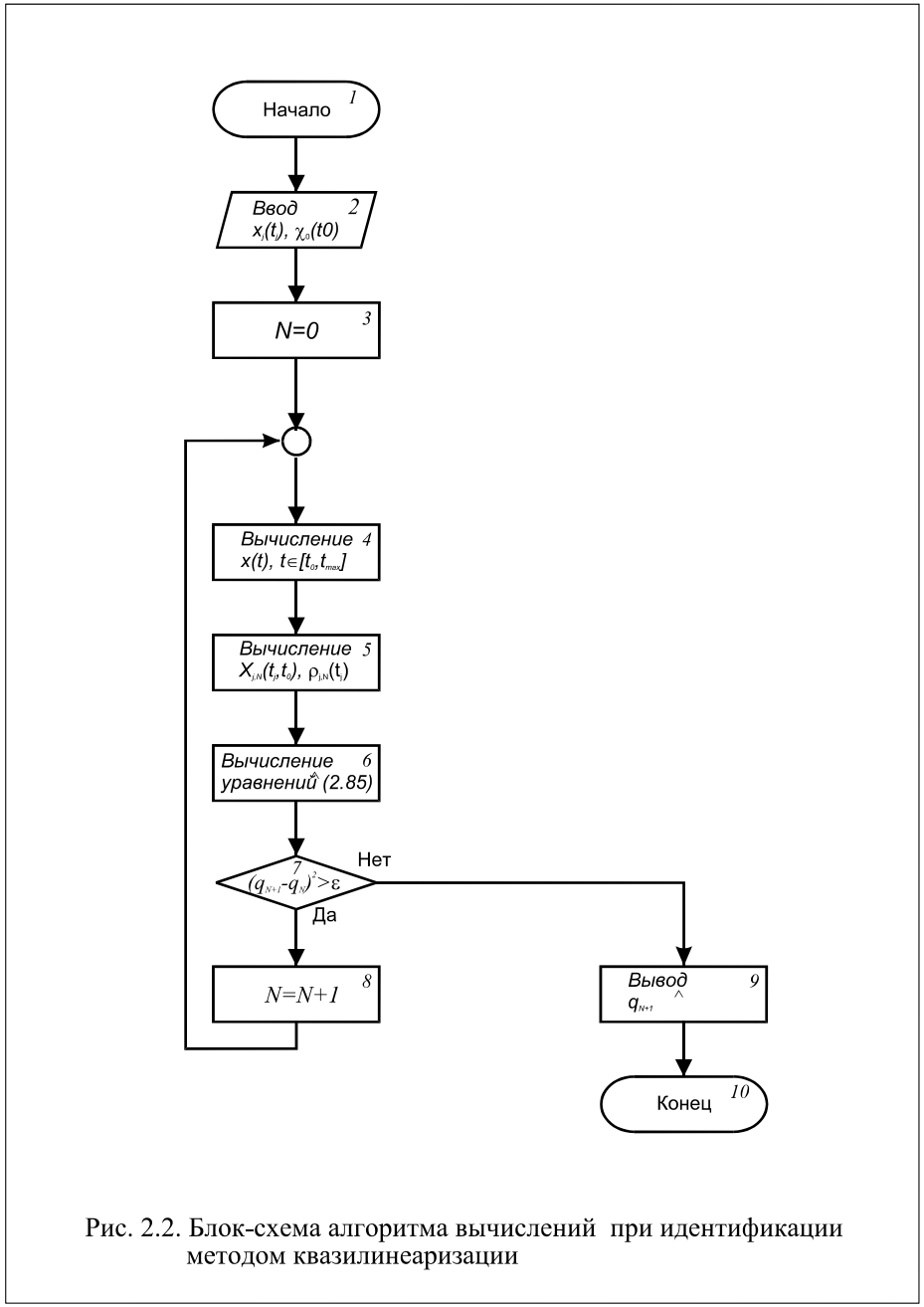


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации

Рисунок 13.1 – блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации

Рассмотрим реализацию метода квазилинеаризации на примере.

Пример

Рассмотрим достаточно простую систему:

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t). \qquad (13.13)$$

Здесь: $u(t)$ – входная измеряемая скалярная функция,
x – скаляр,
a, b – необходимо найти.

Имеется три измерения переменной состояния $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$. Обозначим:

$$\chi = \begin{bmatrix} x \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (13.6), $(N+1)$-е приближение вектора χ имеет вид:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{\Psi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N} + \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N} (\hat{\chi}_{N+1} - \hat{\chi}_N), \qquad (13.14)$$

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi} = \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (13.15)$$

В соответствием с уравнение (13.10), будет:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_N. \qquad (13.16)$$

Из уравнения (13.16) ищется фундаментальная матрица $X_N(t,t_0)$. Согласно (13.7)

$$\hat{V}_N = \hat{\Psi}_{\chi=\hat{\chi}_N}\Big| - \hat{A}_N\hat{\chi}_N = \\ = \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_N - \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}. \qquad (13.17)$$

По найденной $X_N(t,t_0)$ с учетом (13.17) из (13.13) ищутся $\rho_{j,N}(t_j)$. Затем из уравнений

$$\begin{cases} x(t_1) = X_{11,N}(t_1,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_1) + X_{12,N}(t_1,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_1) + \\ \qquad + X_{13,N}(t_1,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_1) + \rho_{1,N}(t_1), \\ x(t_2) = X_{11,N}(t_2,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_2) + X_{12,N}(t_2,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_2) + \\ \qquad + X_{13,N}(t_2,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_2) + \rho_{1,N}(t_2), \\ x(t_3) = X_{11,N}(t_3,t_0)\hat{x}_{N+1}(t_3) + X_{12,N}(t_3,t_0)\hat{a}_{N+1}(t_3) + \\ \qquad + X_{13,N}(t_3,t_0)\hat{b}_{N+1}(t_3) + \rho_{1,N}(t_3). \end{cases} \qquad (13.18)$$

ищутся $\hat{x}_{N+1}(t_0)$, $\hat{a}_{N+1}$, $\hat{b}_{N+1}$. При необходимости процедура повторяется.

Идентификация линейных динамических систем. Определение весовой функции из уравнения свертки

По наблюдениям входного и выходного сигналов линейной стационарной системы на конечном промежутке времени нужно определить ее весовую функцию (импульсная переходная функция).

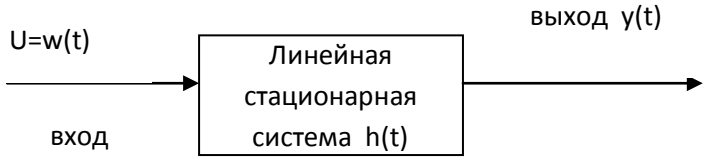


Рисунок 13.2 - Линейная стационарная системы

Выходной сигнал системы при входе и нулевых начальных условиях выражается известным интегралом свертки:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)w(\tau)d\tau \qquad (13.23)$$

предполагается, что $w(\tau) = 0$ при $r < 0$, $w(0) \neq 0$.

Введем теперь аппроксимацию входной функции времени $w(t)$ кусочно-постоянной функцией в N точках с шагом Δ, причем $N\Delta = T$

$$w(t) \approx w(n\Delta) \text{ при } n\Delta < t < (n+1)\Delta \qquad (13.24)$$

h(t) примем постоянной между точками разбиения.

$$h(t) \approx h\left(\frac{2n+1}{2}\Delta\right) \text{ при } n\Delta<t<(n+1)\Delta \qquad (13.15)$$

В терминах ступенчатой аппроксимации $w(t)$ и $h(t)$ интеграл (13.23) при $t = n\Delta$ приближенно запишется в виде

$$y(n\Delta) = \Delta\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta - i\Delta\right)w(i\Delta) \qquad (13.25)$$

Обозначим вектор наблюдения выхода (размерности N) через

$Y^T(T) = [y(\Delta)\ y(2\Delta)\ \ldots\ y(N\Delta)]$

и значений весовой функции

$$h^T(T) = \left[h\left(\frac{\Delta}{2}\right) h\left(\frac{3\Delta}{2}\right) \ldots h\left(\frac{2N-1}{2}\Delta\right) \right].$$

Перепишем уравнение (13.25) в векторно- матричном виде

$$Y(T) = \Delta W h(T) \qquad (13.26)$$

Матрица W определяется равенством

$$W = \begin{bmatrix} w(0) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w(\Delta) & w(0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w(2\Delta) & w(\Delta) & w(0) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

где $h_n = h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta\right), \qquad h_1 = \frac{Y(\Delta)}{\Delta w(0)}$

Достоинством рассмотренного подхода является возможность использовать любые входные сигналы. Поскольку нет необходимости применять специальные тестовые сигналы, можно использовать реализации, полученные в процессе нормальной эксплуатации системы.

Если входной сигнал является функцией единичного скачка, алгоритм (13.28) заметно упрощается. В этом случае w(iΔ) = 1 для всех i, (13.28) примет вид

$$h_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i-1}^{n-1} h_{n-i}.$$

Определив величину $H_n = \sum_{i-1}^{n-1} h_{n-i}$,

получим $h_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - H_n$ при этом $H_n = H_{n-1} + h_{n-1}$.

Оценивание весовой функции по методу наименьших квадратов

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом показанную на рисунке 13.2.. Объект предполагается линейным и стационарным. Выход системы запишем в виде (см. рисунок 13.3):

$$z(t) = \int_0^{T_S} h(\tau)x(t-\tau)d\tau + n(t) \qquad (13.29)$$

h(τ) - весовая функция (импульсная переходная функция)

x(t-τ)- вход, n(t) - невязка (иногда называют шумом),

T_S - время установления, определяется как min интервал времени, измеренный от момента подачи импульсного сигнала до момента, когда реакция системы составит 5% пикового значения .

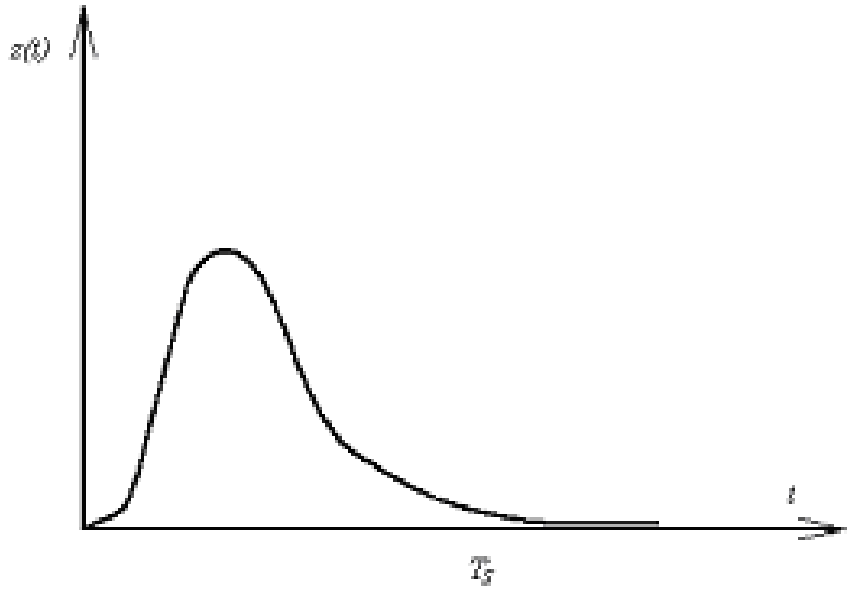


Рисунок 13.3 - Зависимость выхода системы z(t) от времени – уравнение 13.29

Входная и выходная переменные представлены в формуле (13.29) в виде отклонений от своих математических ожиданий, т.е.

$x(t) = x - m_x, \qquad z(t) = z - m_z.$

Представим уравнение (13.29) в дискретном виде

$$z(i\Delta) = \sum_{j=0}^{N_S-1} h(j\Delta)x[(i-j)\Delta]\Delta + n_i, i = 0,1,...,N_{m-1}$$

или

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_S-1} h_j x_{i-j}\Delta + n_i,$$

(13.30)

Здесь $T_S = N_S\Delta$ - время установления, $T_m = N_m\Delta$ - время измерения выхода, N_i - содержит не только невязку в моменты времени $n(i\Delta)$, но и ошибки аппроксимации функции $x(t-\tau)$.

В результате аппроксимации задача оценивания непрерывной функции $h(\tau)$ заменяется (параметризуется) оцениванием конечного множества параметров $h_0,..., h_{Ns-1}$ (называется дискретной импульсной переходной функцией)

Для упрощения представления запишем уравнения (2) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} z_o \\ \vdots \\ z_{N_m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} \cdots x_{0,N_S-1} \\ \cdots \\ x_{N_m-1,0} \cdots x_{N_m-1,N_S-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o\Delta \\ \vdots \\ h_{N_S-1}\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_o \\ \vdots \\ n_{N_m-1} \end{bmatrix}$$

(13.31)

Запишем матричное представление в символическом виде

$$z = A\beta + n$$

(13.32)

Задача сводится к определению вектора параметров β при заданной матрице A и вектора измерений z.

Критерием при оценивании вектора параметров β является выбор таких β, которые минимизируют сумму квадратов невязок на интервале измерений.

Положим $J = \sum_{i=1}^{N_m-1} n_i^2$ в матричном виде $J = n^T n$ (13.33)

подставляя (13.32) в (13.33) получим $J=(z-A\beta)^T (z-A\beta)$.

Необходимо определить β^*, удовлетворяющие условию

$$J^* = \min_{\beta} J = J /_{\beta=\beta^*}.$$

Необходимым условием вычисления J является выполнение условия экстремума

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta^*} = 0 \quad .$$

Запишем уравнения (13.21) в виде сумм

$$J = \sum_{i=0}^{N_m-1} \left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j \right) \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k \right) \qquad (13.34)$$

Продифференцируем (13.24) J по компонентам вектора β:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_m} /_{\beta_m=\beta_m^*} = \sum_{i=0}^{N_m-1} \left[-a_{im} \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^* \right) + \left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j \right)(-a_i) \right]_=$$

$$= -2 \sum_{i=0}^{N_m-1} a_{im} \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^* \right) \quad \text{при } m = 0,1,..., N_S - 1 \qquad (13.35)$$

Формулу (13.35) представим в матричном виде:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} /_{\beta=\beta^*} = -2A^T (z - A\beta^*) = 0 \qquad (13.36)$$

это уравнение является необходимым условием экстремума J.

Достаточным условием при расчете min J является положительная определенность квадратной матрицы

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial J}{\partial \beta} \right)^T /_{\beta=\beta^*}$$

Если формулу (13.26) продифференцируем еще раз по β, то получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial J}{\partial\beta}\right)^T /_{\beta=\beta^*} = 2A^T A \qquad (13.37)$$

Если матрица A^TA - неособенная, и также правая часть не зависит от β в (13.37), то условие экстремума (13.36) является необходимым и достаточным условием минимума.

Перепишем (13.36) в виде:

$A^TA\,\beta^* = A^Tz$, отсюда $\beta^* = (A^TA)^{-1}A^Tz$ (13.38)

Напомним, что

$$A=\begin{bmatrix} x\dots x \\ x\dots x \end{bmatrix},\quad \beta^{*T}=\left[h_0^*\Delta,\dots,h_{N_i-1}^*\Delta\right],\quad z^{*T}=\left[z_0\dots z_{N_m-1}\right].$$

В непрерывной форме уравнение (13.38) принимает вид

$$\int_0^{T_S}\left[\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t-\theta)dt\right]h^*(\theta)d\theta = \int_0^{T_m} x(t-\tau)z(t)dt \qquad (13.39)$$

Уравнение (13.39) – **уравнение Винера-Хопфа (УВХ)** и может быть переписано в виде:

$$\int_0^{T_S} R_{xx}(r-\theta)h^*(\theta)d\theta = R_{xz}(r)$$

где $R_{xx}(\tau)$ - автокорреляционная функция $\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t)dt$ и $R_{xz}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция.

Автокорреляционной функцией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция двух аргументов $K_{xx}(t,t')$, которая при каждой паре значений t,t‘ равна корреляционному моменту соответствующему случайному сечению функции X(t).

$K_{xx}(t,t') = M\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X(t) & X(t') \end{bmatrix}$.

Оценивание состояния фильтром Калмана.

Для учёта погрешности измерения, погрешности моделирования вектора состояния и влияния на систему случайных факторов воспользуемся дискретным фильтром Калмана для оценки вектора состояния.

Текущие значения оценок вектора состояния $\hat{x}(k)$ определяются по итерационному правилу:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1|k) + K(k)\cdot\left[y(k+1) - H\cdot\hat{x}(k+1|k)\right],\\
\hat{x}(k+1|k) &= A(k)\cdot\hat{x}(k) + B(k)\cdot u(k) + F(k)\cdot\bar{q}(k), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0,\\
K(k) &= P_x(k+1|k)\cdot H^T\cdot\left[H\cdot P_x(k+1|k)\cdot H^T + R\right]^{-1},\\
P_x(k+1|k) &= A(k)\cdot P_x(k|k)\cdot A(k)^T + F(k)\cdot Q(k)\cdot F(k)^T,\\
P_x(k+1|k+1) &= \left[I - K(k)\cdot H\right]\cdot P_x(k+1|k),\\
P_x(0|0) &= P_{x_0},
\end{aligned} \qquad (13.41)$$

где y(.) – канал измерений ( ), H – матрица канал измерений, I – единичная матрица соответствующей размерности, $P_{x_0} = M\left\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\right\}$ - матрица ковариаций начального вектора состояния.

Не все компоненты вектора состояний могут быть измерены. Некоторые их них измеряются с некоторой погрешностью, поэтому оценим значения вектора состояний фильтром Калмана. Для этого воспользуемся каналом измерений).

H- матрица вида:

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, если 2-я компонента вектора состояния - неизмеряемая величина;

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, если 1-я компонента вектора состояния - неизмеряемая величина;

величина;

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, если 1-я и 2-я компоненты вектора состояния – неизмеряемы.

В результате оценки вектора состояний фильтром Калмана получим, что оценка практически полностью совпадает со значениями вектора состояний, полученными в результате моделирования.

См. также дополнительный материал по к этой лекции в приложении В

Основная литература

1. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.
2. Бенькович Е.С. и др. Практическое моделирование динамических систем. -СПб: БХВ-Петербург, 2002

Дополнительная литература

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001